Aufgabe 1 (*Kettenregel*)
Sei $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u^+ = \max(u, 0) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ und

$$Du^+ = \chi_{\{u>0\}} Du \quad \text{sowie} \quad D|u| = \chi_{\{u>0\}} Du - \chi_{\{u<0\}} Du.$$

Zeigen Sie auch $Du = 0$ fast überall auf $\{u = 0\}$.
Hinweis. Betrachten Sie $u_\varepsilon = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$.

Aufgabe 2 (Lipschitz = $W^{1,\infty}$)
Zeigen Sie, dass für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist Lipschitzstetig mit Konstante L.

(b) f ist schwach differenzierbar mit $\|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq L$.

Hinweis Betrachten Sie für $(a) \Rightarrow (b)$ Differenzenquotienten

$$(\Delta^h_v f)(x) = \frac{1}{h}\big(f(x + hv) - f(x)\big) \qquad \text{für } v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 19.12.2011 vor der Vorlesung.